On note $M_n(\mathbb{C})$ l'algèbre sur $\mathbb{C}$ des matrices carrées $n \times n$ à coefficients complexes. On rappelle que deux matrices A et B sont dites semblables s'il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$ et que l'on définit ainsi une relation d'équivalence dans $M_n(\mathbb{C})$. Enfin pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ on identifie la matrice A et l'endomorphisme $X \longmapsto AX$ de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ rapporté à sa base canonique (les vecteurs de $\mathbb{C}^n$ étant notés en colonne).

PREMIERE PARTIE

On adopte les notations suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\Delta_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\mu} \\ \mu & 0 \end{pmatrix}, \quad D_\mu = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{C}^* , \qquad \Omega = \{ A \in M_2(\mathbb{C}) \mid A^2 = I \}$$

1° Donner le nombre des classes d'équivalence de matrices semblables contenues dans Ω. Préciser un représentant pour chaque classe.

2° Quelle classe d'équivalence particulière contenue dans Ω peut être caractérisée, parmi toutes les classes de $M_2(\mathbb{C})$, par la donnée du déterminant et de la trace? Donner toutes les matrices de cette classe.

3° On désigne par Σ l'ensemble des matrices inversibles de $M_2(\mathbb{C})$ semblables à leur inverse. Donner un représentant pour chaque classe de matrices semblables contenue dans Σ. Caractériser les matrices de Σ par leur trace et leur déterminant.

4° Trouver B et C dans la classe de S telles que $J_1 = BC$.

Donner tous les couples $(B, C) \in \Omega \times \Omega$ tels que $BC = J_1$.

On note Ω^2 l'ensemble des produits BC lorsque B et C parcourent Ω. Comparer Ω^2 et Σ (on pourra calculer le produit $\Delta_b \Delta_c$, $b, c \in \mathbb{C}^*$).

DEUXIEME PARTIE

On désigne par A, B et C trois éléments de $M_n(\mathbb{C})$ vérifiant

$$A = BC, \quad B^2 = C^2 = I,$$

où I est à partir de maintenant la matrice unité de $M_n(\mathbb{C})$.

1° Montrer que A est inversible et que son inverse A^{-1} est semblable à A.

2° Montrer que si $V \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre pour A il en est de même de BV et CV.

3° Montrer que si 1 est valeur propre de A et si le sous-espace propre associé est de dimension 1 alors les trois matrices A, B et C ont une direction propre commune.

4° On suppose que $A = J_{n,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

c'est-à-dire $A = (a_{ij})$ avec $a_{ii} = a_{j,j+1} = 1$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, n-1$, tous les autres coefficients de A étant nuls.

a. Montrer que B et C ont une seule direction propre commune que l'on précisera.

b. Montrer que B et C sont semblables. Préciser suivant la parité de n la dimension des sous-espaces propres de B et C en indiquant dans quel sous-espace est la direction propre commune.

c. Donner un couple (B, C) pour $n = 3, 4, 5$.

d. Montrer l'existence d'un tel couple pour tout n.

TROISIEME PARTIE

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible semblable à son inverse.

1° Montrer que si A admet une et une seule valeur propre et si le sous-espace propre associé est de dimension 1 alors il existe B et C dans $M_n(\mathbb{C})$ telles que $A = BC$, $B^2 = C^2 = I$.

2° On suppose que A admet deux valeurs propres distinctes λ et μ et deux seulement, que λ n'est égale ni à 1 ni à -1 et que le sous-espace propre associé à λ est de dimension 1.

a. Exprimer μ en fonction de λ.

b. Comparer les dimensions des sous-espaces caractéristiques W_λ et W_μ associés respectivement à λ et μ. Qu'en déduit-on sur la parité de n ?

c. En considérant les restrictions aux sous-espaces caractéristiques de l'endomorphisme $X \longmapsto AX$ de $\mathbb{C}^n$ établir que A est semblable à une matrice qui s'exprime simplement en fonction de λ et $J_{k,1}$ pour un entier k à préciser en fonction de n.

d. En s'inspirant du calcul proposé dans le 4° de la première partie montrer qu'il existe B et C dans $M_n(\mathbb{C})$ telles que $A = BC$, $B^2 = C^2 = I$.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail